

Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$ et $C(-2, -2, 4)$. Soit (P) le plan d'équation $x + y - 2z + 12 = 0$

0.25 pt	1.a. Montrer que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$	
---------	--	---

0.25 pt	1.b. Dédurre que les plans (P) et (OAB) sont parallèles.	
---------	--	---

0.25 pt	1.c. Vérifier que : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (OC)	
---------	--	---

0.5 pt	1.d. Vérifier que $C \in (P)$ et montrer que la droite (OC) est orthogonale au plan (P)	
--------	---	---

2. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$, tangente au plan (P) au point C et coupée par le plan (OAB) suivant un cercle (Γ) de centre O et de rayon $r = 4\sqrt{3}$.

0.5 pt	2.a. Vérifier que $\Omega \in (OC)$ et déduire que $a = b$ et $c = -2a$	
--------	---	---

0.25 pt	2.b. Montrer que $O\Omega = a \sqrt{6}$	
---------	--	---

0.25 pt	2.c. Vérifier que $d(\Omega, (P)) = a + 2 \sqrt{6}$	
0.75 pt	2.d. Montrer que $a = 1$ (Remarquer que $\Omega C^2 - \Omega O^2 = 48$) puis déduire les coordonnées de Ω et le rayon R de la sphère (S)	

Exercice 2 (3.5 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives : $a = \sqrt{3} + i$, $b = \bar{a}$ et $c = 2\sqrt{3}$

0.5 pt	1.a. Montrer que $\frac{a - c}{a} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	
0.25 pt	1.b. Écrire le nombre complexe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sous forme trigonométrique	

2. Soit R la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - a) + a$.

0.5 pt	2.a. Vérifier que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.	
0.5 pt	2.b. Montrer que $R(O) = C$	

3. Soit D le point d'affixe d tel que $R(B) = D$

0.5 pt	3.a. Montrer que $d = 2\sqrt{3} + 2i$ et déduire que les points A, D et O sont alignés.	
0.5 pt	3.b. Montrer que $\frac{c-b}{d} = \frac{1}{2}$	
0.25 pt	3.c. Montrer que $OB = DC$	
0.5 pt	3.d. Déduire que le quadrilatère $OBCD$ est un trapèze isocèle.	

Exercice 3 (2.5 points):

Une urne contient quatre boules blanches numérotées : 0; 0; 1; 1 et deux boules noires numérotées : 0; 1
 Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne. On considère les événements suivants :

A : « Les deux boules tirées sont de même couleur. »

B : « La somme des nombres portés par les deux boules tirées est égale à 2. »

0.5 pt	1.a. Montrer que $p(A) = \frac{7}{15}$	
0.5 pt	1.b. Montrer que $p(B) = \frac{1}{5}$	

0.5 pt

2. Montrer que la probabilité de B sachant que A est réalisé est
$$p(B/A) = \frac{1}{7}$$



3. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque tirage, associe la somme des nombres portés par les deux boules tirées.

0.75 pt

3.a. Copier et compléter le tableau ci-dessous, qui représente la loi de probabilité de la variable aléatoire X



x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$			

0.25 pt

3.b. Montrer que l'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = 1$



Problème (11 points):

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - 1$

0.25 pt

1.a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$



0.5 pt

1.b. Vérifier que $g(x) < 0$ sur $] -\infty, 0[$ et que
 $g(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$.



0.75 pt

2. Montrer que $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} |g(x)| dx = \frac{9}{8}$



Partie II:

On considère la fonction numérique définie par $f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x})$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0.25 pt	1. Vérifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$	
0.5 pt	2.a. Montrer que f est une fonction paire.	
0.5 pt	2.b. Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	
0.5 pt	3.a. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - \ln 2$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$	
0.5 pt	3.b. Déduire que la droite (Δ') d'équation $y = -x - \ln 2$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$	
0.75 pt	4.a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{1 + e^{2x}}$	
0.5 pt	4.b. Déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty, 0]$ (On peut utiliser la question 1 de la Partie I.)	

0.5 pt

5.a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$ 

0.5 pt

5.b. Montrer pour tout x de $[0, +\infty[: f(x) \leq x$ 

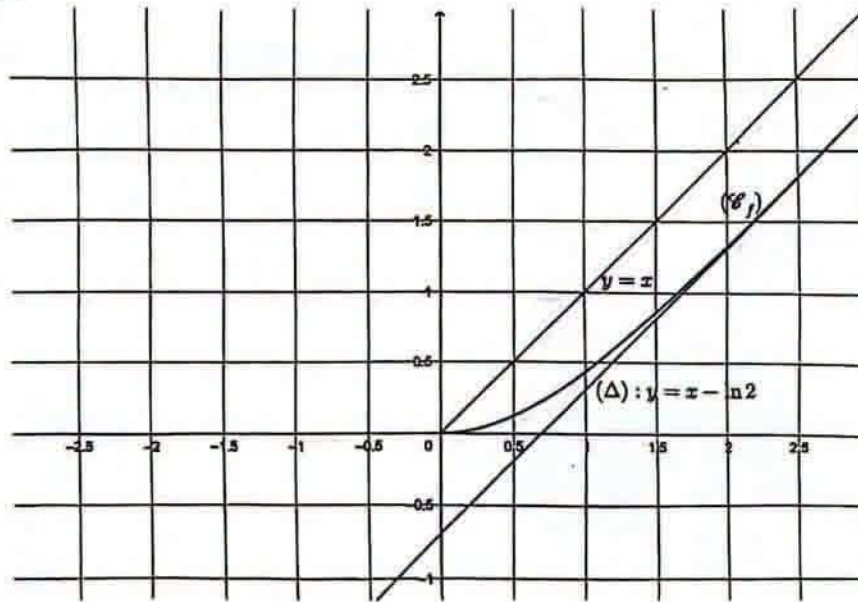
0.5 pt

5.c. Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ) sur l'intervalle $[0, +\infty[$ 

0.5 pt

5.d. Dédurre que pour tout x de $[0, +\infty[:$
 $0 \leq f(x) - (x - \ln 2) \leq \ln 2$ 

6. Le graphique ci-dessous représente la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f sur $[0, +\infty[$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



0.5 pt

6.a. Reproduire le graphique ci-dessus puis tracer dans le même repère, la droite (Δ') et compléter la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty, 0]$



0.5 pt	6.b. Soit $\mathcal{A}$, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C}_f)$, la droite (Δ) , et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ Montrer que $0 \leq \mathcal{A} \leq \ln 2$	
--------	--	---

7. Soit φ la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$

0.5 pt	7.a. Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (L'expression de $\varphi^{-1}(x)$ n'est pas demandée.)	
--------	--	--

0.25 pt	7.b. Vérifier que $\varphi^{-1}\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)\right) = \ln 2$	
---------	--	---

0.5 pt	7.c. Montrer que φ^{-1} est dérivable en $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ et que $(\varphi^{-1})'\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)\right) = \frac{5}{3}$	
--------	--	---

Partie III

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = \ln 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier naturel n

0.5 pt	1. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq \ln 2$, pour tout n de $\mathbb{N}$	
--------	---	---

0.5 pt	2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question 5.b de la Partie II.)	
--------	--	---

0.75 pt	3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.	
---------	---	---