



MATH EXCELLENCE

Test diagnostique

Entrée en 2^e Bac Sciences Maths

Vingt questions sur les prérequis de 1^{re} Bac. Une heure trente. Un corrigé détaillé et une grille de lecture.

Professeur de mathématiques

Fès — Maroc

anassmaths.com

Document gratuit · Travail — Méthode — Réussite · 06 11 81 46 05

Σ Mode d'emploi

Lis cette page avant de commencer

Ce test ne note pas ton niveau en 2^e Bac. Il mesure une seule chose : est-ce que les outils de 1^{re} Bac sont *disponibles* quand tu en as besoin. C'est le vrai facteur qui sépare, en Sciences Maths, les élèves qui suivent de ceux qui décrochent en novembre.

- **Durée : 1 h 30.** Chronomètre-toi vraiment. Un exercice que tu sais faire en dix minutes au lieu de trois, c'est un exercice que tu ne finiras pas le jour de l'examen.
- **Sans le cours, sans corrigé, sans téléphone.** La calculatrice est autorisée : aucune question ne la réclame.
- **Rédige.** En Sciences Maths, la moitié des points perdus le sont sur la justification, pas sur le calcul. Écris tes phrases entières.
- **Ne saute rien.** Si tu bloques, laisse un blanc et continue : une question laissée vide est une information utile, une question devinée ne l'est pas.
- **Corrige-toi ensuite** avec le corrigé détaillé (page 4), en appliquant le barème indiqué en marge de chaque question.

La grille de lecture

Score	Ce que ça veut dire
16 – 20	Tes prérequis sont solides. Tu peux attaquer les limites et les suites de 2 ^e Bac dès la rentrée. Vise la régularité, pas la remise à niveau.
11 – 15	Les bases sont là, mais deux ou trois outils te manquent au moment où tu en as besoin. Repère lesquels grâce au tableau de la dernière page et reprends-les <i>avant</i> la Toussaint.
6 – 10	La 2 ^e Bac SM va être difficile en l'état. Ce n'est pas une fatalité : il te faut un mois de reprise ciblée sur les prérequis, en parallèle du programme.
0 – 5	Le problème n'est pas le programme de 2 ^e Bac, il est en amont. Écris-moi avant la rentrée : on regarde ensemble si la filière Sciences Maths est le bon choix, et à quelles conditions.

★ Le vrai indicateur, ce n'est pas le total

Regarde *où* tu as perdu tes points. Perdre 4 points répartis sur les vingt questions n'a rien à voir avec perdre 4 points concentrés sur la partie C : le premier cas est du bruit, le second est un trou. Le tableau de la dernière page te donne la lecture par partie.



Partie A — Automatismes

8 questions · 0,5 pt chacune · 4 points

20 minutes maximum pour cette partie. Ce sont des gestes qui doivent être automatiques : si tu réfléchis plus d'une minute à l'une de ces questions, note-le, c'est déjà un résultat.

- A.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 5x + 6 \leq 0$. [0,5 pt]
- A.2 Écrire sous la forme d'une seule fraction : $\frac{2x-1}{x+3} - 1$. [0,5 pt]
- A.3 Donner la forme canonique de $f(x) = x^2 - 6x + 11$, puis son minimum. [0,5 pt]
- A.4 Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos(2x) = \frac{1}{2}$. [0,5 pt]
- A.5 Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+1}$. [0,5 pt]
- A.6 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$. [0,5 pt]
- A.7 Écrire $|x-2| + |x+1|$ sans valeur absolue pour $x \in]-1, 2[$. [0,5 pt]
- A.8 Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = 3 - \frac{2}{n}$. Étudier son sens de variation. [0,5 pt]



Partie B — Fonctions

2 exercices · 5 points

Exercice B.1 — étude d'une fonction rationnelle [2,5 pt]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- Déterminer trois réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ pour tout $x \neq 1$.
- En déduire que la droite $(\Delta) : y = 2x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
- Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (Δ) .

Exercice B.2 — dérivabilité en un point [2,5 pt]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 4|$.

- Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 2.
- f est-elle dérivable en 2? Justifier.
- Interpréter géométriquement le résultat et donner les équations des demi-tangentes à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Σ Partie C — Suites et raisonnement

2 exercices · 5 points

Exercice C.1 — suite récurrente [2,5 pt]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 2$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

Exercice C.2 — récurrence et divisibilité [2,5 pt]

Démontrer que pour tout entier naturel n , le nombre

$$A_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

est divisible par 7.

Σ Partie D — Géométrie et trigonométrie

2 exercices · 6 points

Exercice D.1 — produit scalaire dans le plan [3 pt]

ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire la longueur BC .
3. Soit I le milieu de $[BC]$. Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis calculer AI .
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.

Exercice D.2 — équations trigonométriques [3 pt]

1. Résoudre dans $] -\pi, \pi]$ l'équation $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.
2. Démontrer que pour tout réel $x : \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.
3. En déduire les solutions dans $] -\pi, \pi]$ de l'équation $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$.

Stop. Ne tourne la page qu'une fois le temps écoulé. Le corrigé n'a de valeur que si tu as vraiment cherché.

Σ Corrigé — Partie A

Barème : 0,5 pt par question, pas de demi-point

Corrigé A.1

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Le trinôme est du signe de $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines, négatif entre elles. Donc $S = [2, 3]$.

Corrigé A.2

$$\frac{2x-1}{x+3} - 1 = \frac{2x-1-(x+3)}{x+3} = \frac{x-4}{x+3}, \text{ pour } x \neq -3.$$

Corrigé A.3

$x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 - 9 + 11 = (x - 3)^2 + 2$. Le minimum vaut 2, atteint en $x = 3$.

Corrigé A.4

$\cos(2x) = \cos \frac{\pi}{3}$ équivaut à $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. Dans $[0, 2\pi[: S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$.

Corrigé A.5

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1) - (3x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}.$$

Corrigé A.6

Forme indéterminée $\infty - \infty$. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Corrigé A.7

Pour $x \in]-1, 2[: x - 2 < 0$ donc $|x - 2| = 2 - x$; $x + 1 > 0$ donc $|x + 1| = x + 1$. La somme vaut $(2 - x) + (x + 1) = 3$.

Corrigé A.8

$u_{n+1} - u_n = \left(3 - \frac{2}{n+1}\right) - \left(3 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)} > 0$. La suite est strictement croissante.

 Corrigé — Partie B

Fonctions

Corrigé B.1 (2,5 pt)

1. Limites (1 pt). En $\pm\infty$, le quotient se comporte comme $\frac{2x^2}{x} = 2x$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

En 1, le numérateur tend vers $2 - 1 + 1 = 2 > 0$ et le dénominateur vers 0, en gardant le signe de $x - 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2. Décomposition (0,75 pt). La division euclidienne de $2x^2 - x + 1$ par $x - 1$ donne $2x^2 - x + 1 = (x - 1)(2x + 1) + 2$, d'où, pour $x \neq 1$:

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x - 1}, \quad \text{soit } a = 2, b = 1, c = 2.$$

3. Asymptote oblique (0,5 pt). $f(x) - (2x + 1) = \frac{2}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, donc $(\Delta) : y = 2x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. Position relative (0,25 pt). Le signe de $f(x) - (2x + 1) = \frac{2}{x - 1}$ est celui de $x - 1$:

— si $x > 1$: $f(x) > 2x + 1$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (Δ) ;

— si $x < 1$: $f(x) < 2x + 1$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (Δ) .

$\mathcal{C}_f$ et (Δ) ne se coupent en aucun point.

Corrigé B.2 (2,5 pt)

Sur un voisinage de 2 : pour $x > 2$, $x^2 - 4 > 0$ donc $f(x) = x^2 - 4$; pour $x < 2$ (et $x > -2$), $x^2 - 4 < 0$ donc $f(x) = 4 - x^2$. On a $f(2) = 0$.

1. Les deux taux d'accroissement (1,5 pt).

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-(x + 2)) = -4.$$

Donc $f'_d(2) = 4$ et $f'_g(2) = -4$.

2. Conclusion (0,5 pt). $f'_d(2) \neq f'_g(2)$: f n'est pas dérivable en 2.

3. Interprétation (0,5 pt). Le point $A(2, 0)$ est un *point anguleux* de $\mathcal{C}_f$: la courbe y admet deux demi-tangentes distinctes, d'équations

$$y = 4(x - 2) \text{ pour } x \geq 2, \quad y = -4(x - 2) \text{ pour } x \leq 2.$$

 Corrigé — Partie C

Suites et raisonnement

Corrigé C.1 (2,5 pt)**1. Encadrement par récurrence (1 pt).** Posons $P(n) : 0 \leq u_n \leq 2$.*Initialisation* : $u_0 = 0$, donc $0 \leq u_0 \leq 2$: $P(0)$ est vraie.*Hérédité* : supposons $P(n)$ vraie pour un n fixé. Alors $2 \leq u_n + 2 \leq 4$, et comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$:

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2.$$

Comme $\sqrt{2} > 0$, on a bien $0 \leq u_{n+1} \leq 2$: $P(n+1)$ est vraie.Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.**2. Monotonie (1 pt).** Pour $x \in [0, 2]$:

$$\sqrt{x+2} \geq x \iff x+2 \geq x^2 \iff x^2 - x - 2 \leq 0 \iff (x-2)(x+1) \leq 0,$$

ce qui est vrai sur $[-1, 2]$, donc en particulier sur $[0, 2]$. (L'élévation au carré est licite car les deux membres sont positifs.)En appliquant cela à $x = u_n \in [0, 2]$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \geq u_n$. La suite (u_n) est croissante.**3. Convergence et limite (0,5 pt).** (u_n) est croissante et majorée par 2 : d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ , avec $0 \leq \ell \leq 2$.En passant à la limite dans $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ (la fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$ est continue sur $[0, 2]$) :

$$\ell = \sqrt{\ell + 2} \iff \ell^2 = \ell + 2 \text{ et } \ell \geq 0 \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0 \text{ et } \ell \geq 0.$$

Donc $\ell = 2$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.**Corrigé C.2 (2,5 pt)**Posons $P(n) : 7 \mid A_n$ où $A_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.*Initialisation* : $A_0 = 3^1 + 2^2 = 3 + 4 = 7 = 7 \times 1$. $P(0)$ est vraie.*Hérédité* : supposons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $A_n = 7k$. Alors

$$A_{n+1} = 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2}.$$

L'astuce consiste à faire apparaître A_n en écrivant $2 = 9 - 7$:

$$A_{n+1} = 9 \cdot 3^{2n+1} + (9 - 7) \cdot 2^{n+2} = 9(3^{2n+1} + 2^{n+2}) - 7 \cdot 2^{n+2} = 9A_n - 7 \cdot 2^{n+2}.$$

Donc $A_{n+1} = 9 \cdot 7k - 7 \cdot 2^{n+2} = 7(9k - 2^{n+2})$, qui est bien un multiple de 7. $P(n+1)$ est vraie.Par récurrence, A_n est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.*Vérification rapide* : $A_1 = 27 + 8 = 35 = 7 \times 5$ et $A_2 = 243 + 16 = 259 = 7 \times 37$.

 Corrigé — Partie D

Géométrie et trigonométrie

Corrigé D.1 (3 pt)**1. Produit scalaire (0,5 pt).**

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 4 \times 3 \times \cos 60^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6.$$

2. Longueur BC (0,75 pt). $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 + 16 - 12 = 13, \quad \text{d'où } BC = \sqrt{13}.$$

3. La médiane AI (1 pt). I étant le milieu de $[BC]$: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Donc

$$AI^2 = \frac{1}{4} (AB^2 + AC^2 + 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{16 + 9 + 12}{4} = \frac{37}{4}, \quad AI = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

4. Ensemble de points (0,75 pt). $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ signifie que M voit le segment $[BC]$ sous un angle droit, ou que M est confondu avec B ou C . L'ensemble cherché est donc le **cercle de diamètre $[BC]$** , c'est-à-dire le cercle de centre I et de rayon $\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.**Corrigé D.2 (3 pt)****1. Équation du second degré en $\cos x$ (1 pt).** Posons $X = \cos x$, avec $X \in [-1, 1]$. L'équation devient $2X^2 - X - 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc $X = \frac{1+3}{4} = 1$ ou $X = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$.— $\cos x = 1$ donne $x = 0$ dans $] -\pi, \pi]$;— $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$ donne $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}$.

$$\text{Donc } S = \left\{ -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

2. Mise sous forme $R \sin(x - \varphi)$ (1 pt).

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) = \sqrt{3} \sin x - \cos x.$$

3. Résolution (1 pt). L'équation équivaut à $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$, soit $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$. D'où

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi + 2k\pi$.

$$\text{Dans }] -\pi, \pi] : S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi \right\}.$$

 Ton score, et ce qu'il faut en faire

Dernière page

Lecture par partie

Partie	Sur	Si tu as perdu la moitié des points ou plus
A — Automatismes	4	Le problème n'est pas la compréhension, c'est l'entraînement. Il te faut du volume : vingt calculs par jour pendant trois semaines, pas un chapitre de plus.
B — Fonctions	5	C'est le prérequis le plus coûteux : toute la 2 ^e Bac est de l'analyse. Reprends limites et dérivation de 1 ^{re} Bac <i>avant</i> d'ouvrir le programme de terminale.
C — Suites et raisonnement	5	C'est un problème de rédaction plus que de maths. La récurrence a une structure fixe : initialisation, hypothèse, hérédité, conclusion. Écris-la en entier dix fois.
D — Géométrie et trigonométrie	6	Souvent négligé, et pourtant c'est là que les points sont les plus faciles à récupérer : les formules sont peu nombreuses et les exercices très typés.

Les trois chapitres à reprendre en priorité

Sur anassmaths.com, les cours de 1^{re} Bac SM, les fiches de révision et les QCM auto-corrigés sont en accès libre — sans compte, sans email à donner.

1. **Généralités sur les fonctions et limites** : c'est le socle de la partie B.
2. **Suites numériques et raisonnement par récurrence** : le socle de la partie C, et le premier chapitre de 2^e Bac.
3. **Produit scalaire et calcul trigonométrique** : la partie D, qui revient telle quelle dans les nombres complexes.

★ Si tu veux qu'on regarde ta copie ensemble

Envoie-moi ton score par partie sur WhatsApp au **06 11 81 46 05**. Je te réponds avec les deux ou trois choses précises à reprendre en priorité dans ton cas — que tu rejoignes le *Programme Excellence* ou non. Ça ne coûte rien et ça t'évite de travailler au hasard pendant un mois.

Le programme d'accompagnement, son contenu semaine par semaine et son tarif sont décrits sur anassmaths.com/programme.

Document gratuit — Math Excellence — Professeur de mathématiques — anassmaths.com
Tu peux l'imprimer et le partager avec tes camarades.